ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Exercice

Etant donné une fonction f continue sur $[0,1]$ on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,dx$. L'objet de l'exercice est d'étudier sur des exemples le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

1) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer u_n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans les cas suivants :
   a) f est la fonction constante égale à a
   b) pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x$
   c) pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x^p$ où p est un entier naturel donné
   d) pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x(1-x)$.

2) Dans cette question $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0,1]$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.
   a) Calculer u_1.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. Qu'en déduit-on ?
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1-u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$. En déduire l'encadrement :
   $0 \leqslant 1-u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   d) En remarquant qu'on a, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} = x\dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et en effectuant une intégration par parties établir l'égalité
   $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$
   e) Montrer que, pour tout réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   f) Donner une valeur approchée de $1-u_{10}$, puis de u_{10} à 10^{-2} près.

Problème

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $\mathbf{E}(X)$.

I. Question préliminaire

Soit T une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/2$.

a) Rappeler les valeurs de son espérance et de sa variance ; en déduire la valeur de $\mathbf{E}(T^2)$.

b) A l'aide de ce qui précède déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ et, pour tout entier naturel non nul, établir les inégalités

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leqslant 2 \quad et \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 6$$

II. Etude de la suite de lancers d'une pièce.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'expérience aléatoire consistant en la succession de n lancers d'une même pièce équilibrée, les résultats ("pile" et "face") d'un lancer étant indépendants des résultats des autres lancers et se produisant chacun avec une probabilité $1/2$. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une suite ω de n "pile" ou "face". On dispose ainsi d'un espace probabilisé dont on notera $\mathbf{P}$ la probabilité .

Pour tout résultat ω on note, d'une part, $S_n(\omega)$ le nombre de "pile" obtenus au cours des n lancers et d'autre part, $T_n(\omega)$ le rang d'apparition du premier "pile" si au moins un "pile" apparaît dans ω, sinon on pose $T_n(\omega) = 0$. On définit ainsi deux variables aléatoires S_n et T_n.

Par exemple si $n = 5$, pour $\omega = (P, F, F, P, F)$ alors $S_5(\omega) = 2$ et $T_5(\omega) = 1$; pour $\omega = (F, F, F, F, F)$ alors $S_5(\omega) = 0$ et $T_5(\omega) = 0$. Les variables aléatoires S_5 et T_5 prennent, avec une probabilité non nulle, les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

1) **Dans cette question $n = 3$.**
   a) Donner la loi du couple (S_3, T_3).
   b) Donner la loi de T_3 et calculer son espérance.
   c) Quelle est la loi de S_3 et quelle est son espérance ?
   d) Les variables S_3 et T_3 sont-elles indépendantes ?
   e) Calculer les probabilités suivantes : i) $\mathbf{P}([S_3 = T_3])$
      ii) $\mathbf{P}([S_3 = T_3]/[T_3 \neq 0])$
      iii) $\mathbf{P}([T_3 = 1]/[S_3 = 2])$
   f) Donner la loi de la variable produit S_3T_3, calculer son espérance et en déduire le quotient $\dfrac{\mathbf{E}(S_3T_3)}{\mathbf{E}(S_3)\mathbf{E}(T_3)}$.

2) **Désormais et jusqu'à la fin du problème on revient au cas général** où n désigne un entier naturel non nul.
   Pour $k = 0$ puis pour tout entier k compris entre 1 et n, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}([T_n = k]/[S_n = 1])$. Pourquoi ce résultat était-il intuitivement prévisible ?

3) a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire T_n et donner sa loi.
   b) Pour $x \in [0, 1[$ on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Donner une autre expression de $f(x)$, puis deux expressions de $f'(x)$.
   En déduire la valeur de l'espérance de T_n en fonction de n et montrer que sa limite quand $n \to +\infty$ est égale à 2.
   c) Reconnaître la loi de S_n et préciser son espérance.
   Justifier l'inégalité $S_nT_n \geqslant S_n$ et en déduire que $\mathbf{E}(S_nT_n) \geqslant \dfrac{n}{2}$.
   d) Quand T_n prend la valeur k $(0 < k \leqslant n)$ quelles valeurs peut prendre S_n ?
   e) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x(n + 1 - x)$ définie sur $[0, n + 1]$. En distinguant les cas n pair et n impair, donner la valeur maximale que peut prendre la variable S_nT_n.
   En déduire que $\mathbf{E}(S_nT_n) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

4) *On cherche maintenant à obtenir un meilleur encadrement de $\mathbf{E}(S_nT_n)$ permettant de calculer*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbf{E}(S_nT_n)}{n}$$

On **admet** que $\mathbf{E}(S_nT_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} \dfrac{n - k + 2}{2}$.

   a) Utiliser la question préliminaire pour montrer que :

$$\frac{(n+2)}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - 3 \leqslant \mathbf{E}(S_nT_n) \leqslant n + 2$$

   b) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} = 2$.
   c) En supposant que la suite de terme général $\dfrac{\mathbf{E}(S_nT_n)}{n}$ converge, déterminer sa limite.
   d) En déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbf{E}(S_nT_n)}{\mathbf{E}(S_n)\mathbf{E}(T_n)}$$

   Interpréter ce résultat.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail